

§1.6 全概公式和逆概公式

- 定理6.1(全概公式): 假设 B_1, \dots, B_n 是 Ω 的分割(完备事件组; $P(B_i) > 0, \forall i$), 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i).$$

推导: $P(A) \stackrel{\text{可列可加}}{=} \sum_i P(AB_i) \stackrel{\text{乘法公式}}{=} \sum_i P(B_i)P(A|B_i).$

- 可改为可列分割: B_1, B_2, \dots .
- 分情况讨论!

例6.1. 甲、乙、丙三人射击敌机. 甲、乙、丙击中概率分别为: 0.4, 0.5, 0.7. 恰有0, 1, 2, 3 人击中时飞机坠毁概率分别为0, 0.2, 0.6, 1. 求: 飞机坠毁概率.

• $A =$ “飞机坠毁”, $B_i =$ “恰好 i 人击中”.

• $P(B_0) = (1 - 0.4)(1 - 0.5)(1 - 0.7) = 0.09,$

$$P(B_1) = 0.4(1 - 0.5)(1 - 0.7) + (1 - 0.4)0.5(1 - 0.7) \\ + (1 - 0.4)(1 - 0.5)0.7 = 0.36,$$

$$P(B_2) = \cdots = 0.41,$$

$$P(B_3) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.14.$$

• $P(A|B_i)$ 依次为0, 0.2, 0.6, 1.

• $P(A) = \sum_{i=0}^3 P(B_i)P(A|B_i)$
 $= 0.09 \times 0 + 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1 = 0.458.$

- 定理6.2(逆概公式, Bayes公式):

假设 B_1, \dots, B_n 是 Ω 的分割, $P(A) > 0$. 则

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}, \quad k = 1, \dots, n$$

推导: $P(B_k|A)$ 条件概率 $\frac{P(AB_k)}{P(A)}$ 乘法公式, 全概公式 $\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$.

- 先验概率; 后验概率
- A 是显明的; B_1, \dots, B_n 是隐藏的.

例6.8. 某艾滋病检测法的灵敏度如下:

假阴性的概率为0.05; 假阳性的概率为0.01.

已知某地区有0.001比例人群被艾滋病感染, 检测出甲被感染.

求: 甲感染艾滋病的概率.

- 显明: $T =$ 甲检测出被感染, $T^c =$ 甲检测出健康;
- 隐藏: $A =$ 甲被感染, $A^c =$ 甲健康.
- 已知: $P(A) = 0.001 = p$, $P(A^c) = 1 - p$.
 $P(T|A) = 1 - 0.05$, $P(T|A^c) = 0.01$.

- 逆概公式:

$$\begin{aligned} P(A|T) &= \frac{P(A)P(T|A)}{P(A)P(T|A) + P(A^c)P(T|A^c)} \\ &= \frac{0.95p}{0.95p + 0.01(1 - p)} = \frac{0.95p}{0.94p + 0.01} \approx 0.087. \end{aligned}$$