§1.3 古典概型

- 古典概型: 在随机试验中, 总共有n 种不同结果,

  出现的机会均等.

- $A_i =$ “出现第i 种结果”:

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

- 称$A_1, \cdots, A_n$ 为(等概)基本事件, 具有:

  完全性、不相容性、等概性(对称性).

- 若事件A 由m 个基本事件组成, 则

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

- 关键: 不重不漏地数数.

  工具: 组合数, 例如, $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

例3.1. 同时投掷两颗骰子, 求: 得到(总和) 7 点的概率.

- 建模: 甲、乙两颗, 甲的点数为i, 乙的点数为j, 总共$6 \times 6 = 36$ 种不同结果.
- $A =$ "得到7 点" 含6 种结果:

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1).$$

- $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

例3.3. 有$N(\geqslant 2)$ 个阄, 其中$m(< N)$ 个内含“有”字. N 位同学排队依次任取一阄. 求: 排第i 位的同学取到有字阄的概率.

- 建模: 将阄编号, 有字$1 \sim m$, 剩余$m+1 \sim N$.
- 总共$N!$ 种不同结果:

$(a_1, \cdots, a_N)$ 表示第j 个人抽到编号为a_j 的阄, $j = 1, \cdots, N$.

- $A =$“第i 位同学取到有字阄”, 即$a_i \in \{1, \cdots, m\}$,
- A 中含$m(N-1)!$ 个基本事件, 于是

$$P(A) = \frac{m(N-1)!}{N!} = \frac{m}{N}.$$

- 抓阄结果与排队次序无关.

例3.5 设有一批产品, 共100 件, 其中5 件次品(不合格产品). 现在从中任取50 件, 求: 恰好取到2 件次品的概率.

- 建模: 将合格品编号$1 \sim 95$, 次品编号$96 \sim 100$.
- 总共C_{100}^{50} 种不同结果. 例如, $\{a_1, \cdots, a_{50}\}$.
- $A =$"恰好取到2件次品", 含$C_{95}^{48}C_5^2$ 个基本事件. 因此,

$$P(A) = \frac{C_{95}^{48}C_5^2}{C_{100}^{50}}.$$

- 例3.6. 一般地, N 件产品中含n 件次品, 任取m 件, $A=$ “恰好取到r 件次品” . 则

$$P(A)=\frac{C_{N-n}^{m-r}C_n^r}{C_N^m}.$$

- 定理3.1. 更一般地, N 件产品分k 类, 第i 类有N_i 件$(N_1+\cdots+N_k=N)$. 从中任取m 件, $A=$ “第i 类恰有m_i 件, $i=1,\cdots,k$” $(m_1+\cdots+m_k=m)$. 则

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^{m_1}\cdots C_{N_k}^{m_k}}{C_N^m}.$$

例3.9. N 位学生, 排队参加口试. 设有n 个考签, 被抽到的考签用后随即放回, 求: “考试结束时有考签没被抽到”的概率.

- 建模: 考签编号$1 \sim n$. 共有n^N 种结果:

  $(a_1, \cdots, a_N)$ 表示第i 位学生抽到a_i 号考签.
- $A_i =$ “第i 号考签未被抽到”, 含$(n-1)^N$ 个基本事件.
- $A =$ “至少有一个考签没有被抽到”, 含多少个基本事件?

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

定理3.2.(Jordan公式)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

- $P(A_{i_1}\cdots A_{i_k}) = \frac{(n-k)^N}{n^N}$, 因此,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)^N}{n^N}.$$