研究陈述

可构造平展层的示性类与 ε-因子

阳恩林*

2024 年 02 月 24 日

目录

*北京大学数学科学学院，yangenlin@math.pku.edu.cn

概述

本人的研究主要集中在可构造平展层与 motive 的几何分歧理论。在过去的五年（2019-2023 年）中，本人与合作者一起发表了三篇论文 [UYZ20, YZ21, JY21] 以及四篇预印本论文 [YZ22, JY22, JSY22, XY23]。主要结果如下：

1. 在论文 [UYZ20] 中，我们证明了可构造平展层的 ε 因子扭结公式，这是 Kato 与 Saito 在 [KS08, Conjecture 4.3.11] 中提出的猜想[1]；
2. 在论文 [YZ21] 中，我们首次提出了相对版本的 Kato-Saito 扭结公式猜想。作为这个猜想的依据，我们将 Abbes 和 Saito 定义的上同调示性类在横截（transversal）条件下推广到了相对的情形。这个概念后来被陆晴与郑维喆教授 [LZ22] 进一步推广到了 ULA 层（universally locally acyclic sheaves）；
3. 在论文 [YZ22] 中，我们构造了一种新的上同调示性类（称为 non-acyclicity 类，简称 NA 类）。利用这个类，我们证明了拟射影情形的 Saito 猜想。Saito 猜想是指，Abbes-Saito 所定义的上同调示性类可以用示性链计算出来。作为 NA 类的应用，对于可构造平展层，我们首次提出并证明了上同调版本的 Milnor 公式与导子公式；
4. 在论文 [XY23] 中，我们定义了 NA 类的几何类比，并提出了非孤立奇点情形下的 Milnor 公式猜想。该猜想公式给出了光滑代数簇上可构造平展层的 NA 类与示性链的关系；
5. 在论文 [JY21, JY22, JSY22] 中，我们研究了 motive 的分歧理论。利用 NA 类，我们首次定义了二次型版本的 Artin 导子，并构造了二次型版本的 Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式。

本人的研究得到了以下科研基金的支持：

- 2022 年至 2026 年，国家重点研发计划青年科学家项目，代数簇的 L 函数与示性类，300 万元，在研，主持；
- 2023 年至 2026 年，国家自然科学基金-面上项目，几何分歧中的二次型不变量，45 万元，在研，主持；
- 2020 年至 2022 年，国家自然科学基金-青年科学基金项目，关于 ℓ-进层的 ε 因子的分歧扭结公式，27 万元，已结题，主持。

本文组织如下：在第 1 节中，我们简要概述几何分歧理论；第 2 节介绍我们在 Kato-Saito 猜想（ε 因子的扭结公式）上的工作；在第 3 节中，我们总结 NA 类的性质，并讨论关于示性类的 Saito 猜想；在第 4 节中，我们回顾 NA 类的构造；在第5节中，我们回顾 motive 分歧理论方面的研究工作；

1 几何分歧理论

在本节，我们简要概述分歧理论中可构造平展层的示性类（characteristic class）与示性链（characteristic cycle）理论。

1.1 设 S 是诺特概形，Sch_S 是 S 上可分有限型概形构成的范畴。设 Λ 是有限局部环且剩余域的特征在 S 上可逆。对任何概形 $X \in \mathrm{Sch}_S$，我们用 $D_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ 表示由 X 上有限 tor 维数且同调是

[1]原始猜想是用 Swan 类来表述的。

可构造平展层的 Λ-模复形组成的三角范畴。

1.2 考虑关于 S 的假设条件：

(G) $S = \mathrm{Spec}k$，其中 k 是特征为 $p > 0$ 的完满域（perfect field）。
在这种几何情况下，对任何 $\mathcal{K} \in D_{\mathrm{ctf}}(S, \Lambda)$，我们有一个定义明确的量 $\mathrm{dim}\mathcal{K} = \mathrm{rank}\mathcal{K}$。

(A) 设 S 是离散赋值环的谱。设 η 是 S 的一般点（generic point），s 是其闭点。我们假设剩余域 $k(s)$ 是特征为 $p > 0$ 的完满域。
在这种算术情况下，对任何 $\mathcal{K} \in D_{\mathrm{ctf}}(S, \Lambda)$，我们有 Swan 导子 $\mathrm{Sw}\mathcal{K}$（测量野分歧），全维数 $\mathrm{dimtot}\mathcal{K} = \mathrm{dim}\mathcal{K}_{\bar{\eta}} + \mathrm{Sw}\mathcal{K}$ 与 Artin 导子 $a_S(\mathcal{K}) = \mathrm{dim}\mathcal{K}_{\bar{\eta}} - \mathrm{dim}\mathcal{K}_{\bar{s}} + \mathrm{Sw}\mathcal{K} = \mathrm{dimtot}R\Phi_{\mathrm{id}}(\mathcal{K})$，其中 $R\Phi$ 是消失链函子。

在分歧理论中，Artin 导子和 Swan 导子有三种不同的高维推广：Abbes 和 Saito 在 [AS07] 中引入的上同调示性类，Kato 和 Saito 在 [KS08, KS12] 中提出的 Swan 类，以及 Saito 在 [Sai17] 中基于 Beilinson 奇异支撑构造的示性类（链）。它们与下述 Riemann-Roch 类型的问题相关：

问题 1.3 设 $f : X \to S$ 是可分有限型态射且 $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$。

- 在几何情形 (G) 下，如何计算 $\chi_c(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \mathrm{dim}Rf_!\mathcal{F}$？
- 在算术情形 (A) 下，如何计算 $\mathrm{Sw}Rf_!\mathcal{F}$、$\mathrm{dimtot}Rf_!\mathcal{F}$ 以及 $a_S(Rf_!\mathcal{F})$？

上述问题之前已由 Abbes [Abb00], Abbes-Saito [AS07], Bloch [Blo87], Deligne [Del72, Del11], Hu [Hu15], Kato-Saito [KS04, KS08, KS12], Laumon [Lau83], Saito [Sai17, Sai18, Sai21] 和 Tsushima [Tsu11] 进行过研究。

基于观察到 Swan 导子可以通过对数版局部相交理论来定义，Kato 和 Saito [KS04, KS08, KS12] 利用对数几何和 K-理论版本的局部相交理论来研究分歧理论。他们的方法论产生了所谓的 Swan 类，它可以被视为 Swan 导子的高维推广。最近，Abe [Abe21] 引入了一种同伦/无穷范畴的方法来研究分歧理论。

在 [YZ22] 中，我们引入了一个支撑在 NA 集（non-acyclicity locus）Z 上的上同调类（称为 NA 类），其中 Z 是 X 的最小闭子集使得 $X \setminus Z \to S$ 相对于 $\mathcal{F}|_{X \setminus Z}$ 是 ULA 的。我们使用 NA 类以及平展上同调来研究分歧理论。使用这个类，我们得到了 Artin 导子的一个上同调/motivic 表达式（参见 (3.9.1)）。利用这个范畴表达式，我们能对 motive 研究类似的 Riemann-Roch 类型的问题（参见 [JY22]）.

1.4 Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式 考虑几何情形 (G)。假设 X 是 $S = \mathrm{Spec}k$ 上的紧合光滑连通曲线。Euler-Poincaré 示性数 $\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ 可通过经典的 Grothendieck-Ogg-Shafarevich (GOS) 公式来计算

$$\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \mathrm{dim}\mathcal{F}_{\bar{\eta}} \cdot \chi(X_{\bar{k}}, \Lambda) - \sum_{x \in Z} a_x(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{deg}(x), \tag{1.4.1}$$

其中 η 是 X 的一般点，Z 是一个有限闭点集使得 $\mathcal{F}|_{X \setminus Z}$ 是光滑的，并且 $a_x(\mathcal{F}) = a_{X_{(x)}}(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 在点 x 处的 Artin 导子。利用 Gauss-Bonnet-Chern 公式 $\chi(X_{\bar{k}}, \Lambda) = \mathrm{deg}(c_1(\Omega^{1,\vee}_{X/k}) \cap [X])$，GOS 公式 (1.4.1) 可以重写为：

$$\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \mathrm{deg}(cc_{X/k}(\mathcal{F})), \tag{1.4.2}$$

其中 $cc_{X/k}(\mathcal{F})$ 是 X 上的 0 维链类：

$$cc_{X/k}(\mathcal{F}) = \dim\mathcal{F}_{\bar{\eta}} \cdot c_1(\Omega^{1,\vee}_{X/k}) \cap [X] - \sum_{x\in Z} a_x(\mathcal{F}) \cdot [x] \quad \text{in} \quad \mathrm{CH}_0(X). \tag{1.4.3}$$

1.5 示性链 利用示性链[2]可以将 GOS 公式推广到更高维的情况。对于复数域的情形 [KS90]，Kashiwara 与 Schapira 给出了流形上可构造层的示性链的微局部（microlocal）描述，他们的这一刻画并没有利用 $\mathcal{D}$ 模理论。在论文 [Bei07] 中，Beilinson 提出：如何建立 Kashiwara-Schapira 理论的 ℓ 进以及 de Rham 上同调版本？正如 Deligne 所观察到的，正特征情形下的平展上同调的野分歧与复流形上偏微分方程的非正则奇点（irregular singularity）之间存在着强烈的相似性。在手稿 [Del11] 中，Deligne 提出了定义可构造平展层示性链的方案。基于 Beilinson 的奇异支撑（singular support）理论 [Bei16]，Deligne 的研究方案最终被 Saito 所实现 [Sai17, Theorem 4.9 and Theorem 6.13]。

设 X 是域 k 上维数为 n 的光滑连通代数簇。对任何复形 $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$，它的奇异支撑 $SS(\mathcal{F})$ 是余切丛 T^*X 的满足如下条件的最小闭锥子集：若 X 上的局部函数 $f\colon X \to \mathbb{A}^1_k$ 满足 df 与 $SS(\mathcal{F})$ 不相交，则 f 相对于 $\mathcal{F}$ 满足 ULA 条件。Beilinson 在 [Bei16] 中证明了 $SS(\mathcal{F})$ 的维数为 n。后来，Saito [Sai17] 构造了一个以 $\mathbb{Z}$ 为系数的、支撑在 $SS(\mathcal{F})$ 上的 n 维链 $CC(\mathcal{F})$。示性链 $CC(\mathcal{F})$ 满足以下性质

(a) (指标公式) 假设 X 是完满域 k 上的射影[3]光滑代数簇，则

$$\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = (CC(\mathcal{F}), T^*_X X)_{T^*X}, \tag{1.5.1}$$

其中 $T^*_X X$ 是 T^*X 的零截面。

(b) (Milnor 公式) 设 $f : X \to C$ 是平坦态射，其中 X 是光滑概形，C 是光滑曲线。假设 x_0 是 f 相对于 $SS(\mathcal{F})$ 的孤立示性点（isolated characteristic point）(参见 [Sai17, Definition 3.7])，则有

$$-\mathrm{dimtot}\, R\Phi_f(\mathcal{F})_{\bar{x}_0} = (CC(\mathcal{F}), df)_{T^*X, x_0}. \tag{1.5.2}$$

(c) (导子公式) 设 X 是光滑概形，Y 是光滑曲线，η 是 Y 的一般点且 $\mathcal{F} \in D^b_c(X, \Lambda)$。设 $f : X \to Y$ 是拟射影态射使得 f 在 $\mathcal{F}$ 的支撑集上是紧合的，且 f 在某个开集 $V \subseteq Y$ 上是恰当（properly）$SS(\mathcal{F})$ 横截的。对任何闭点 $y \in Y$，我们有如下的 (几何) 导子公式

$$-a_y(Rf_*\mathcal{F}) = (CC(\mathcal{F}), df)_{T^*X, y}, \tag{1.5.3}$$

其中 $a_y(Rf_*\mathcal{F}) = \chi(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) - \chi(X_{\bar{y}}, \mathcal{F}) + \mathrm{Sw}_y R\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F})$ 是 Artin 导子。

当 $\mathcal{F}$ 是常值平展层 Λ 时，我们有 $CC(\Lambda) = (-1)^n \cdot [T^*_X X]$ 且 (1.5.1) 等价于 Gauss-Bonnet-Chern 公式 $\chi(X_{\bar{k}}, \Lambda) = \deg(c_n(\Omega^{1,\vee}_{X/k}) \cap [X])$。公式 (1.5.2) 等价于经典的 Milnor 公式 (参考 [Del73, Conjecture 1.9, P200])

$$-\mathrm{dimtot}\, R\Phi_f(\Lambda)_{\bar{x}_0} = (-1)^n \cdot \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{X/C}, \mathcal{O}_X))_{x_0}, \tag{1.5.4}$$

而 (1.5.3) 等价于经典的 Bloch 导子公式 (参见 [Blo87])。

当 $\mathcal{F}$ 是驯（tamely）分歧层时，公式 (1.5.2) 等价于对数版 Milnor 公式 (参见 [Y14, 1.12])。

当 X 是一条光滑曲线时，公式 (1.5.1) 为经典的 Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式 (1.4.2)。

当 X 是一个光滑曲面时，Deligne 与 Laumon 在 “non-fierce” 假设条件下隐式的定义了示性

[2]通过引入 Swan 类及其算术版本，Kato 与 Saito 在 [KS08, KS12] 中给出了 GOS 公式的另外一种高维推广。有关更多详细信息，请参见2.4。

[3]利用无穷范畴，Abe 得到了紧合光滑代数簇的指标公式。

链 [Lau83]。

注 1.6 *Takeuchi* [Tak19, Tak20] 得到了 *Saito* 示性链的一个变体，它与消失链的局部 ε 因子的 *Milnor* 类型公式有关。

为了后续的方便，我们引入以下定义：

定义 1.7 ([Sai17, Definition 6.7.2]) 设 $0_X : X \to T^*X$ 为零截面。定义 $\mathcal{F}$ 的（几何）示性类为下述零维类：

(1.7.1) $$cc_{X/k}(\mathcal{F}) = 0_X^!(CC(\mathcal{F})) \quad \text{in} \quad \mathrm{CH}_0(X).$$

1.8 正则情形 考虑算术情况（A）。我们假设 S 是混合特征的。我们仍然有 Deligne 关于 Milnor 公式的猜想和 Bloch 的导子公式猜想，这两个公式在一般情况下仍然没有被解决。在 [Org03, Théorème 0.8] 中，Orgogozo 证明了 Bloch 的导子公式蕴含了 Milnor 公式。在 [KS04, Corollary 6.2.7] 中，Kato 和 Saito 证明了导子公式是既约闭纤维嵌入奇异点的强消解假设的推论。特别地，当相对维数等于 1 或 2 时，Milnor 公式猜想是正确的。

一个很自然的问题是，是否存在算术版本的指标公式 (1.5.1)。在 [Abb00] 中，Abbes 证明了局部域上曲线的算术 Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式。Kato 与 Saito 在 [KS04] 中得到了一个高维版本。在 [Sai22] 中，Saito 定义了正则概形的 FW-余切丛。通过使用上同调横截条件，他还引入了正则概形上可构造平展层的奇异支撑（但没有证明其存在性）。我们期待，混合特征情形下的 Milnor 公式与 Bloch 导子公式可以用 FW-余切丛重新表述出来。对于算术曲面，Ooe 得到了部分结果 [Ooe24]。在未来研究计划 I 中 (参见第 **??** 节)，通过构造 NA 类的算术版本，我们将利用上同调方法来研究此问题。

2 示性类与 ε 因子

2.1 ε 因子 L-函数和 ε-因子是朗兰兹纲领和伽罗瓦表示论中的两个重要对象。分歧理论与这两个量之间有重要的关系。

设 k 是特征为 p 的有限域，$f\colon X \to \mathrm{Spec}(k)$ 是相对维数为 n 的光滑射影态射。设 Λ 是特征为 $\ell \neq p$ 的有限域。对 X 上一个可构造平展 Λ 模 $\mathcal{F}$，设 $D(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的对偶 $R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{K}_X)$，其中 $\mathcal{K}_X = Rf^!\Lambda$ 是对偶复形。L-函数 $L(X, \mathcal{F}, t)$ 满足以下函数方程

(2.1.1) $$L(X, \mathcal{F}, t) = \varepsilon(X, \mathcal{F}) \cdot t^{-\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})} \cdot L(X, D(\mathcal{F}), t^{-1}),$$

其中

(2.1.2) $$\varepsilon(X, \mathcal{F}) = \det(-\mathrm{Frob}_k; R\Gamma(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}))^{-1}$$

是 ε 因子 (函数方程 (2.1.1) 的常数项)，而 $\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的 Euler-Poincaré 示性数。在函数方程 (2.1.1) 中，因子 $\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ 和 $\varepsilon(X, \mathcal{F})$ 都与分歧理论有关。实际上，$\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \deg cc_X(\mathcal{F})$ (参见 (1.5.1) 与 (1.7.1))。ε 因子与分歧理论的关系则更加复杂。

2.2 扭结公式 设 $\rho_X\colon CH_0(X) \to \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ 是互反律映射，它将一个闭点 $s \in X$ 所定义的类 $[s]$ 映射到 Frob_s（几何 Frobenius）。设 $\mathcal{G}$ 是 X 上的光滑层，秩为 1 的行列式层 $\det\mathcal{G}$ 给出了表示 $\det\mathcal{G} : \pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \Lambda^\times$。在与 Umezaki 以及赵以庚的合作中 [UYZ20]，我们证明了 ε 因子扭结公

式：

$$\varepsilon(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})=\det\mathcal{G}(-cc_X(\mathcal{F}))\cdot\varepsilon(X,\mathcal{F})^{\mathrm{rank}\mathcal{G}}, \tag{2.2.1}$$

该公式[4]是 Kato 与 Saito 在 [KS08, Conjecture 4.3.11] 中提出的猜想公式。当 $\mathcal{F}$ 是常值层 Λ 时，这在 [Sai84] 中得到了证明。如果 $\mathcal{F}$ 是 X 的一个开稠密子概形 U 上的光滑层，且补集 $D=X\setminus U$ 是一个简单正规交叉除子 (SNCD)，且层 $\mathcal{F}$ 沿边界 D 是驯分歧的，那么扭结公式 (2.2.1) 是 [Sai93, Theorem 1] 的一个推论。如果 $\dim(X)=1$，公式 (2.2.1) 可以从 Deligne 与 Laumon 的乘积公式得来 (参见 [Del72e, 7.11] 与 [Lau87, 3.2.1.1])。对于特征不为 2 的有限域上的紧合光滑曲面，在某些技术性假设条件下，Vidal 在 [Vid09a, Vid09b] 中证明了类似的结果。

作为扭结公式 (2.2.1) 的推论，利用互反律映射 ρ_X 是单射 [KS83, Theorem 1]，我们证明了示性类与紧合推出是相容的。一般而言，在某个很弱的假设条件下，Saito 证明了示性链与紧合推出是相容的 (参见 [Sai17, 7.2], [Sai18, Conjecture 1] 与 [Sai21, Theorem 2.2.5])。在论文 [YZ21] 中，我们提出了扭结公式的相对版本 (2.5.1)。

问题 2.3 如果 $\mathcal{G}$ 仅在 X 的某个稠密开子概形 $U\subseteq X$ 上是光滑的，但其沿着边界 $X\setminus U$ 的野分歧远小于 $\mathcal{F}$ 的野分歧，是否存在一个类似的扭结公式？

2.4 Swan 类 为了将曲线上的 Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式推广到高维代数簇上，Kato 与 Saito 在 [KS08] 中引进了 Swan 类。Saito 后来猜测，该 Swan 类应当可以用示性链给出来 (参见 [Sai17, Conjecture 5.8])。更精确地说，设 X 是特征为 $p>0$ 的完满域 k 上的光滑概形，$\overline{X}$ 是 X 的光滑紧化。对于 X 上的光滑可构造平展层 $\mathcal{F}$，Saito 猜测 $\mathcal{F}$ 的 Swan 类具有整系数，并且等于 $CC(j_!\mathcal{F})-\mathrm{rank}\mathcal{F}\cdot CC(j_!\Lambda)$ 通过零截面的拉回。对于有限域上的光滑曲面，我们在 [UYZ20] 中证明了 Saito 这个猜想的弱版本。如果假设奇点消解定理以及示性类与紧合推出相容，我们的方法也能证明高维版本的 Saito 猜想 (参见 [UYZ20, Theorem 6.6])。

2.5 扭结公式的相对版本 在 [YZ21, 2.1] 中，我们提出了 Kato-Saito 扭结公式的相对版本，并在某类横截条件下证明了它。设 S 是 $\mathbb{Z}[1/\ell]$ 上的正则诺特概形，$f:X\to S$ 是相对维数为 n 的光滑紧合态射。设 Λ 是特征为 ℓ 的有限域或者 $\Lambda=\overline{\mathbb{Q}}_\ell$。设 $\mathcal{F}\in D_c^b(X,\Lambda)$ 使得 f 相对于 $\mathcal{F}$ 是 ULA 的。我们猜想存在一个（相对）链类 $cc_{X/S}(\mathcal{F})\in\mathrm{CH}^n(X)$，使得对 X 上的任何光滑层 $\mathcal{G}$，我们有一个同构

$$\det Rf_*(\mathcal{F}\otimes^L\mathcal{G})\simeq(\det Rf_*\mathcal{F})^{\otimes\mathrm{rank}\mathcal{G}}\otimes^L\det\mathcal{G}(cc_{X/S}(\mathcal{F}))\quad\text{in}\quad K_0(S,\Lambda), \tag{2.5.1}$$

其中 $K_0(S,\Lambda)$ 是 $D_c^b(S,\Lambda)$ 的 Grothendieck 群。在 (2.5.1) 中，$\det\mathcal{G}(cc_{X/S}(\mathcal{F}))$ 是如下定义的秩为 1 的光滑层：

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(S)\xrightarrow{(cc_{X/S}(\mathcal{F}),-)}\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)\xrightarrow{\det\mathcal{G}}\Lambda^\times, \tag{2.5.2}$$

其中的配对由 $\mathrm{CH}^n(X)\times\pi_1^{\mathrm{ab}}(S)\to\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ 给出 (参见 [Sai94, Proposition 1])。

当 S 是完满域 k 上的光滑概形时，利用示性链 $CC(\mathcal{F})$，我们在 [YZ21, Definition 2.11] 中构造了可能满足猜想的类 $cc_{X/S}(\mathcal{F})$。作为依据，我们在 [YZ21, Theorem 2.12] 中证明了猜想公式 (2.5.1) 的一个特殊情形。

从上述相对扭结公式中，我们意识到在某些横截条件下，上同调示性类存在相对版本 (参见 [YZ21, Definition 3.6])。利用相对的上同调示性类，我们证明了相对版本的 Lefschetz-Verdier 迹公式 [YZ21, Theorem 3.9]。陆晴与郑维喆教授利用范畴迹将这些结果进一步推广到了 ULA 层。

[4]原始猜想是用 Swan 类来表述的。

2.6 微局部描述 设 R 为一个交换环，$\mathcal{F}$ 是紧致实解析流形 X 上的完满可构造 R 模复形。利用 K 理论谱，Beilinson 在 [Bei07] 中建立了拓扑 ε 因子理论。更精确地说，他给出了 $\det R\Gamma(X,\mathcal{F})$ 的 Dubson-Kashiwara 类型的描述。他进一步提出，这一理论是否存在 ℓ 进与 de Rham 上同调的类比。对于 de Rham 上同调，Beilinson 的学生 Patel 在 [Pat12] 中给出了类似的构造。基于此，对于零特征域上的光滑射影代数簇，Abe 与 Patel 在 [AP18] 中对 $\mathcal{D}_X$ 模的 de Rham ε 因子证明了类似的扭结公式。

对于 ℓ 进上同调，Beilinson 的问题依然悬而未决。对于有限域 k 上的光滑曲线 X，以及 X 上的可构造平展层 $\mathcal{F}$，Deligne 在 [Del72e] 中提出了

$$\det(-\mathrm{Frob}_k; R\Gamma(X,\mathcal{F}))$$

的 ε 分解猜想公式，这一猜想被 Laumon [Lau87] 利用局部 Fourier 变换以及 ℓ 进版本的稳定相位原理所解决。Guignard [Gui22] 证明了一个高维的类比 (也请参见 [Tak19])。

2.7 引用 我们关于 Kato-Saito 猜想的工作 [UYZ20] 被 [AP18, Sai21, Gui22, YZ21, YZ22] 以及下述论文所引用：

1. W. Sawin, A. Forey, J. Fresán and E. Kowalski, *Quantitative sheaf theory*, Journal of the American Mathematical Society, 36(3), (2023): 653-726.
2. D. Patel and K. V. Shuddhodan, *Brylinski-Radon transformation in characteristic $p>0$*, preprint arXiv:2307.04156, 2023.
3. D. Takeuchi, *Characteristic epsilon cycles of ℓ-adic sheaves on varieties*, arXiv:1911.02269, 2019.
4. F. Orgogozo and J. Riou, *Cycle caractéristique sur une puissance symétrique d'une courbe et déterminant de la cohomologie étale*, arXiv:2312.07776, 2023.
5. A. Rai, *Comparison of the two notions of characteristic cycles*, arXiv:2312.09945, 2023.

3 NA 类与 Saito 猜想

3.1 设 $h: X \to \mathrm{Spec}k$ 是完满域 k 上的可分有限型态射且 $\mathcal{K}_{X/k} = Rh^!\Lambda$。对任何对象 $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$，Abbes 与 Saito 在 [AS07] 中利用 Verdier 配对定义了它的上同调示性类 $C_{X/k}(\mathcal{F}) \in H^0(X,\mathcal{K}_{X/k})$。当 X 在 k 上紧合时，Lefschetz-Verdier 迹公式给出

(3.1.1) $$\chi(X_{\bar{k}},\mathcal{F}) = \mathrm{Tr}C_{X/k}(\mathcal{F}),$$

其中 $\mathrm{Tr}: H^0(X,\mathcal{K}_{X/k}) \to \Lambda$ 是迹映射。

利用分歧理论，Abbes 与 Saito 在假设某些分歧条件下计算了秩为 1 的层的上同调示性类 [AS07]。但对一般的可构造平展层，上同调示性类的计算一直是一个悬而未决的问题。为此，Saito 提出了如下猜想：

猜想 3.2 (Saito, [Sai17, Conjecture 6.8.1]) 设 X 是完满域 k 上光滑概形的闭子概形。设 $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$。考察由 (1.7.1) 所定义的示性类 $cc_{X/k}(\mathcal{F})$。则有

(3.2.1) $$C_{X/k}(\mathcal{F}) = \mathrm{cl}(cc_{X/k}(\mathcal{F})) \quad \text{in} \quad H^0(X,\mathcal{K}_{X/k}),$$

其中 $\mathrm{cl}: \mathrm{CH}_0(X) \to H^0(X,\mathcal{K}_{X/k})$ 是链类映射。

注意，当 X 是特征为 p 的有限域 k 上的射影光滑代数簇时，上同调群 $H^0(X,\mathcal{K}_{X/k})$ 通常是非平凡的。例如，如果 $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^m$ 且 $\ell \neq p$，那么我们有 $H^0(X,\mathcal{K}_{X/k}) \simeq H^1(X,\mathbb{Z}/\ell^m)^\vee \simeq \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)/\ell^m$。

Saito 的猜想指出，上同调示性类可以根据示性链来计算。请注意，在猜想 3.2 中涉及的两个分歧不变量是以完全不同的方式定义的。示性链是通过 Milnor 公式 (1.5.2) 来刻画的，而上同调示性类在某种意义上是通过范畴迹来定义的。在特征为零的情况下，复流形上的等式 (3.2.1) 恰好为 Kashiwara 和 Schapira 在 [KS90, 9.5.1] 中证明的微局部指标公式。然而，对于正特征时候的示性链，我们不知道这样的微局部描述（但请参阅 [AS09, Abe21]）。在 [YZ22] 中，我们证明了 Saito 猜想的拟射影情形。

定理 3.3 ([YZ22, Theorem 1.3]) 对任何特征为 $p > 0$ 的完满域 k 上的光滑拟射影代数簇 X，猜想*3.2*成立。

3.4 我们处理 Saito 猜想的方法是纤维化方法，它依赖于在一般概形上构建上同调示性类的相对版本。为了实现这一点，有必要对结构态射施加额外的横截条件。设 S 为一个诺特概形。设 $h : X \to S$ 是一个有限型的可分态射，$\mathcal{K}_{X/S} = Rh^!\Lambda$ 且 $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$。实际上，在 h 满足某些光滑和横截条件下，我们在 [YZ21, Definition 3.6] 中引入了相对（上同调）示性类 $C_{X/S}(\mathcal{F}) \in H^0(X, \mathcal{K}_{X/S})$。通过使用范畴迹，这一概念被进一步推广到任何相对于 $\mathcal{F}$ 满足 ULA 条件的可分态射 $h : X \to S$（参见 [LZ22, 2.20]）。我们还在更一般的情况下定义了相对示性类，这种情况允许假设在很小的闭子集之外是 ULA 的。事实上，如果 $Z \subseteq X$ 是一个闭子概形，使得 $H^0(Z, \mathcal{K}_{Z/S}) = H^1(Z, \mathcal{K}_{Z/S}) = 0$，如果 $X \setminus Z \to S$ 相对于 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 是 ULA 的，那么相对示性类 $C_{X/S}(\mathcal{F}) \in H^0(X, \mathcal{K}_{X/S})$ 仍然是良定义的（参见 [YZ22, Definition 3.5]）。我们证明了上同调示性类满足以下纤维化公式。

定理 3.5 ([YZ22, Theorem 6.5]) 设 Y 是特征为 $p > 0$ 的完满域 k 上的光滑连通曲线。设 Λ 是一个有限局部环，使得剩余域的特征在 k 中是可逆的。设 $f : X \to Y$ 是一个有限型的可分态射，且 $Z \subseteq |X|$ 是由有限个闭点构成的集合。设 $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{ctf}}(X, \Lambda)$ 使得 $f|_{X\setminus Z}$ 相对于 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 是 ULA 的。那么我们有

(3.5.1) $$C_{X/k}(\mathcal{F}) - c_1(f^*\Omega^{1,\vee}_{Y/k}) \cap C_{X/Y}(\mathcal{F}) = -\sum_{x\in Z} \mathrm{dimtot} R\Phi_f(\mathcal{F})_{\bar{x}} \cdot [x] \quad \text{in} \quad H^0(X, \mathcal{K}_{X/k}).$$

在文献 [UYZ20, Proposition 5.3.7] 中，示性类 $cc_{X/k}(\mathcal{F})$ 满足类似的纤维化公式。公式 (3.5.1) 表明，示性类 $C_{X/k}(\mathcal{F})$ 可以由维数小于 X 的概形 X_v 上的示性类 $C_{X_v/v}(\mathcal{F}|_{X_v})$（其中 $v \in |Y \setminus Z|$）构建。因此，我们可以通过对 X 的维数进行归纳来证明 Saito 的猜想。对于曲线情形，它由 Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式 (1.4.3) 及其上同调版本（即公式 (3.5.1) 的曲线情形）所给出。

3.6 为了证明定理 3.5，我们必须用一种纯粹的上同调/范畴的方式来定义 (3.5.1) 的右侧，即我们必须定义一个支撑在 NA 集上的上同调类。设 S 为一个诺特概形。考虑 Sch_S 中的一个交换图：

(3.6.1) $$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "\tau"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y, \arrow[dl, "g"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

其中，$\tau : Z \to X$ 是一个闭嵌入，而 g 是一个光滑态射。我们在 X 上定义了一个对象 $\mathcal{K}_{X/Y/S}$，它位于下述正合三角形（distinguished triangle）中（参见 (4.1.3) 以及 [YZ22, (4.2.5)]）

(3.6.2) $$\mathcal{K}_{X/Y} \to \mathcal{K}_{X/S} \to \mathcal{K}_{X/Y/S} \xrightarrow{+1}.$$

设 $\mathcal{F}\in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$，使得 $X\setminus Z\to Y$ 相对于 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 是 ULA 的，且 $h:X\to S$ 相对于 $\mathcal{F}$ 也是 ULA 的。在 [YZ22, Definition 4.6] 中，我们引入了 NA 类（non-acyclicity class）$\widetilde{C}^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})\in H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})$，它支撑在 Z 上。如果满足以下条件：

$$H^0(Z,\mathcal{K}_{Z/Y})=0 \text{ 且 } H^1(Z,\mathcal{K}_{Z/Y})=0 \tag{3.6.3}$$

那么映射 $H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/S})\xrightarrow{(3.6.2)}H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})$ 是一个同构。在这种情况下，类 $\widetilde{C}^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})\in H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})$ 定义了 $H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/S})$ 中的一个元素，记作 $C^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})$。

当 $X=Y\to S=\mathrm{Spec}k$ 在域 k 上光滑时，由于 $\mathrm{id}:X\setminus Z\to X\setminus Z$ 相对于 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 是 ULA 的，因此 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 的上同调层在 $X\setminus Z$ 上是局部常值层。在这种情况下，类 $C^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})$ 是 Abbes-Saito 所定义的局部示性类 [AS07, Definition 5.2.1]。

现在我们来总结 NA 类的函子性质。

定理 3.7 ([YZ22, Theorem 1.9, Proposition 1.11, Theorem 1.12, Theorem 1.14]) 我们将图表 (3.6.1) 简记为 $\Delta=\Delta^Z_{X/Y/S}$，并将 $\widetilde{C}^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})$ 记为 $\Delta=\Delta^Z_{X/Y/S}$。设 $\mathcal{F}\in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$。假设 $Y\to S$ 是光滑的，$X\setminus Z\to Y$ 相对于 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 是 ULA 的，并且 $X\to S$ 相对于 $\mathcal{F}$ 也是 ULA 的。

1. (纤维化公式) 如果 $H^0(Z,\mathcal{K}_{Z/Y})=H^1(Z,\mathcal{K}_{Z/Y})=0$，则有
$$C_{X/S}(\mathcal{F})=c_r(f^*\Omega^{1,\vee}_{Y/S})\cap C_{X/Y}(\mathcal{F})+C_\Delta(\mathcal{F})\quad\text{in}\quad H^0(X,\mathcal{K}_{X/S}). \tag{3.7.1}$$
2. (拉回) 设 $b:S'\to S$ 是诺特概形之间的态射，$\Delta'=\Delta^{Z'}_{X'/Y'/S'}$ 是 $\Delta=\Delta^Z_{X/Y/S}$ 通过基变换 $b:S'\to S$ 得到的。我们有
$$b^*_XC_\Delta(\mathcal{F})=C_{\Delta'}(b^*_X\mathcal{F})\quad\text{in}\quad H^0_{Z'}(X',\mathcal{K}_{X'/Y'/S'}), \tag{3.7.2}$$
其中 $b^*_X:H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})\to H^0_{Z'}(X',\mathcal{K}_{X'/Y'/S'})$ 是拉回态射。
3. (紧合推出) 考察图形 $\Delta'=\Delta^{Z'}_{X'/Y/S}$。设 $s:X\to X'$ 是 Y 上的紧合态射且满足 $Z\subseteq s^{-1}(Z')$。则我们有
$$s_*(C_\Delta(\mathcal{F}))=C_{\Delta'}(Rs_*\mathcal{F})\quad\text{in}\quad H^0_{Z'}(X',\mathcal{K}_{X'/Y/S}), \tag{3.7.3}$$
其中 $s_*:H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})\to H^0_{Z'}(X',\mathcal{K}_{X'/Y/S})$ 是紧合推出映射。
4. (上同调 Milnor 公式) 假设 $S=\mathrm{Spec}k$，其中 k 是一个特征为 $p>0$ 的完满域，并且 Λ 是一个有限局部环，使得其剩余域的特征在 k 中是可逆的。如果 $Z=\{x\}$，那么我们有
$$C_\Delta(\mathcal{F})=-\mathrm{dimtot}R\Phi_f(\mathcal{F})_{\bar{x}}\quad\text{in}\quad\Lambda=H^0_x(X,\mathcal{K}_{X/k}). \tag{3.7.4}$$
5. (上同调导子公式) 假设 $S=\mathrm{Spec}k$，其中 k 是一个特征为 $p>0$ 的完满域，并且 Λ 是一个有限局部环，使得其剩余域的特征在 k 中是可逆的。如果 Y 是 k 上的一个光滑连通曲线，且 $Z=f^{-1}(y)$（其中 $y\in|Y|$ 是闭点），那么我们有
$$f_*C_\Delta(\mathcal{F})=-a_y(Rf_*\mathcal{F})\quad\text{in}\quad\Lambda=H^0_y(Y,\mathcal{K}_{Y/k}). \tag{3.7.5}$$

NA 类的构造也与特殊化映射相兼容（参见 [YZ22, Proposition 4.17]）。

现在，定理 (3.5) 可由 (3.7.1) 和 (3.7.4) 推导得出。通过验证某些图表可交换，可以证明 (3.7.1)-(3.7.3)。等式 (3.7.4) 的证明基于 (3.7.2) 以及 [Abe22] 中的一个同伦技巧。公式 (3.7.5) 可由 (3.7.3) 和 (3.7.4) 推导得出。为了证明 (3.7.1)，我们将 $C_{X/S}$ 和 $C^Z_{X/Y/S}$ 的构造提升到无穷范畴层面，并构造一个中间映射 $L^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})$ 以及一个凝聚交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & \Lambda \arrow[dll, "C^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})"'] \arrow[d, "L^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})"] \arrow[rr, equal] & & \Lambda \arrow[d, "C_{X/S}(\mathcal{F})-\delta^!C_{X/Y}(\mathcal{F})"] \\
\tau_*\tau^!\mathcal{K}_{X/Y/S} & & \tau_*\mathcal{K}_{Z/S} \arrow[ll] \arrow[rr] & & \mathcal{K}_{X/S}.
\end{tikzcd} \tag{3.7.6}$$

由于 $H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})\simeq H^0(Z,\mathcal{K}_{Z/S})$，从交换图 (3.7.6) 可以直接得到纤维化公式 (3.7.1)。

注 3.8 如果将 NA 类应用于 *Saito* 在 [Sai17, p.652, (5.13)] 中构造的图表

(3.8.1)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}(\widetilde{C}) \arrow[r, hook] & (X\times\mathbf{G})^{\nabla} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbf{D}, \arrow[dl] \\ & & \mathbf{G} & \end{tikzcd}$$

那么我们能够在某种意义上给出示性链 $CC(\mathcal{F})$ 的新构造。

3.9 Artin 导子的上同调表达式 设 X 是 k 上的一个光滑连通曲线。令 $\mathcal{F}\in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$，且 $Z\subseteq X$ 是一个由闭点构成的有限集，使得 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 的上同调层是局部常值的。根据上同调 Milnor 公式 (3.7.4)，对于 $\mathcal{F}$ 在 $x\in Z$ 处的 Artin 导子，我们有以下（motivic 的）表达式：

(3.9.1)
$$a_x(\mathcal{F})=\mathrm{dimtot}R\Phi_{\bar{x}}(\mathcal{F},\mathrm{id})=-C^x_{U/U/k}(\mathcal{F}|_U),$$

其中 U 是 X 的任意开子概形，满足 $U\cap Z=\{x\}$。通过 (3.7.1)，我们得到下述上同调 Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式（参见 [YZ22, Corollary 6.6]）：

(3.9.2)
$$C_{X/k}(\mathcal{F})=\mathrm{rank}\mathcal{F}\cdot c_1(\Omega^{1,\vee}_{X/k})-\sum_{x\in Z}a_x(\mathcal{F})\cdot[x]\quad \text{in}\quad H^0(X,\mathcal{K}_{X/k}).$$

基于观察 (3.9.1)，我们能够研究 motive 的分歧理论，并得到 GOS 公式的二次型版本（参见 [JY22]）。

3.10 非孤立奇点的 Milnor 公式 在 [XY23] 中，我们构建了 NA 类的几何对应，并提出了非孤立奇点的 Milnor 公式。该猜想给出了 NA 类与示性链的关系。

4 横截条件

在本节中，我们回顾 NA 类的定义。为了简化我们的符号，我们省略了导出函子的 R 或 L 的符号。

4.1 横截条件 我们回顾在 [YZ22, 2.1] 中引入的（上同调）横截条件，这是 Saito 研究的横截条件的相对版本（[Sai17, Definition 8.5]）。设 S 是一个诺特概形，Λ 是一个诺特环，使得对于 S 上某个可逆整数 m，有 $m\Lambda=0$。考虑 Sch_S 中的笛卡尔图：

(4.1.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\delta"] & T. \end{tikzcd}$$

设 $\mathcal{F}\in D_{\mathrm{ctf}}(Y,\Lambda)$ 以及 $\mathcal{G}\in D_{\mathrm{ctf}}(T,\Lambda)$。令 $c_{\delta,f,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 为下述态射的符合

(4.1.2)
$$\begin{aligned} c_{\delta,f,\mathcal{F},\mathcal{G}}:i^*\mathcal{F}\otimes^L p^*\delta^!\mathcal{G}&\xrightarrow{id\otimes\mathrm{b.c}} i^*\mathcal{F}\otimes^L i^!f^*\mathcal{G}\xrightarrow{\mathrm{adj}} i^!i_!(i^*\mathcal{F}\otimes^L i^!f^*\mathcal{G})\\ &\xrightarrow[\simeq]{\mathrm{proj.formula}} i^!(\mathcal{F}\otimes^L i_!i^!f^*\mathcal{G})\xrightarrow{\mathrm{adj}} i^!(\mathcal{F}\otimes^L f^*\mathcal{G}). \end{aligned}$$

我们定义 $c_{\delta,f,\mathcal{F}}:=c_{\delta,f,\mathcal{F},\Lambda}:i^*\mathcal{F}\otimes^L p^*\delta^!\Lambda\to i^!\mathcal{F}$。如果 $c_{\delta,f,\mathcal{F}}$ 是一个同构，那么我们称态射 δ 是$\mathcal{F}$-横截的。如果 $c_{i,\mathrm{id},\mathcal{F}}$ 是一个同构，那么我们称 i 是 $\mathcal{F}$-横截的。

根据 [YZ22, 2.11]，存在一个函子 $\delta^\Delta:D_{\mathrm{ctf}}(Y,\Lambda)\to D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$，使得对于任意 $\mathcal{F}\in D_{\mathrm{ctf}}(Y,\Lambda)$，我们有一个正合三角形

(4.1.3)
$$i^*\mathcal{F}\otimes^L p^*\delta^!\Lambda\xrightarrow{c_{\delta,f,\mathcal{F}}} i^!\mathcal{F}\to\delta^\Delta\mathcal{F}\xrightarrow{+1}.$$

那么，δ 是 $\mathcal{F}$-横截的当且仅当 $\delta^{\Delta}(\mathcal{F})=0$（参见 [YZ22, Lemma 2.12]）。如果 δ 是一个闭浸入，且 $j: T\setminus W\to T$ 是一个开浸入，那么我们有

(4.1.4) $$\delta^{\Delta}\mathcal{F}:=i^!(\mathcal{F}\otimes^L f^*j_*\Lambda).$$

以下引理给出了横截条件和 ULA 条件之间的等价刻画。

引理 4.2 ([XY23, Lemma 2.2]) 设 $f: X\to S$ 是诺特概形之间的有限型态射，且 $\mathcal{F}\in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$。以下条件是等价的：

1. 态射 f 相对于 $\mathcal{F}$ 是 ULA 的。
2. 对任何 $\mathcal{G}\in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$，自然态射

   (4.2.1) $$D_{X/S}(\mathcal{G})\boxtimes^L\mathcal{F}\to R\mathcal{H}om_{X\times_S X}(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{G},\mathrm{pr}_2^!\mathcal{F})$$

   是 $D_{\mathrm{ctf}}(X\times_S X,\Lambda)$ 中的同构，其中 $\mathrm{pr}_1: X\times_S X\to X$ 与 $\mathrm{pr}_2: X\times_S X\to X$ 是投影，而 $D_{X/S}(\mathcal{F})=R\mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{K}_{X/S})$ 且 $\mathcal{K}_{X/S}=Rf^!\Lambda$。
3. 对于诺特概形之间的任意笛卡尔图

   (4.2.2) $$\begin{tikzcd} Y\times_S X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\delta"'] & S \end{tikzcd}$$

   以及任意的 $\mathcal{G}\in D_{\mathrm{ctf}}(S,\Lambda)$，态射 $c_{\delta,f,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 是一个同构（特别地，δ 是 $\mathcal{F}$-横截的）。

4.3 NA 类 考察 Sch_S 中的交换图 (3.6.1)。设 $i: X\times_Y X\to X\times_S X$ 是对角态射 $\delta: Y\to Y\times_S Y$ 的基变换：

(4.3.1) $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_1"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\delta_0"] \\ X\times_Y X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X\times_S X \arrow[d, "f\times f"] \\ Y \arrow[r, "\delta"] & Y\times_S Y, \end{tikzcd}$$

其中 δ_0 和 δ_1 是对角态射。设 $\mathcal{K}_{X/Y/S}:=\delta^{\Delta}\mathcal{K}_{X/S}\simeq\delta_1^*\delta^{\Delta}\delta_{0*}\mathcal{K}_{X/S}$。根据 (4.1.3)，我们有以下的杰出三角形（参见 [YZ22, (4.2.5)]）

(4.3.2) $$\mathcal{K}_{X/Y}\to\mathcal{K}_{X/S}\to\mathcal{K}_{X/Y/S}\xrightarrow{+1}.$$

设 $\mathcal{F}\in D_{\mathrm{ctf}}(X,\Lambda)$ 使得 $X\setminus Z\to Y$ 相对于 $\mathcal{F}|_{X\setminus Z}$ 是 ULA 的，且 $h: X\to S$ 相对于 $\mathcal{F}$ 也是 ULA 的。我们定义

(4.3.3) $$\mathcal{H}_S=R\mathcal{H}om_{X\times_S X}(\mathrm{pr}_2^*\mathcal{F},\mathrm{pr}_1^!\mathcal{F}),\qquad \mathcal{T}_S=\mathcal{F}\boxtimes_S^L D_{X/S}(\mathcal{F}).$$

相对上同调示性类 $C_{X/S}(\mathcal{F})$ 由以下复合给出（参见 [YZ22, 3.1]）：

(4.3.4) $$\Lambda\xrightarrow{\mathrm{id}}R\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{F})\simeq\delta_0^!\mathcal{H}_S\underset{\simeq}{\xleftarrow{(4.2.1)}}\delta_0^!\mathcal{T}_S\to\delta_0^*\mathcal{T}_S\xrightarrow{\mathrm{ev}}\mathcal{K}_{X/S}.$$

根据对 $\mathcal{F}$ 的假设，由 [YZ22, 4.4] 可知，$\delta_1^*\delta^{\Delta}\mathcal{T}_S$ 的支撑集在 Z 上。NA 类 $\widetilde{C}^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})$ 由以下复合给出（参见 [YZ22, Definition 4.6]）：

(4.3.5) $$\Lambda\to\delta_0^!\mathcal{H}_S\xleftarrow{\simeq}\delta_0^!\mathcal{T}_S\simeq\delta_1^!i^!\mathcal{T}_S\to\delta_1^*i^!\mathcal{T}_S\to\delta_1^*\delta^{\Delta}\mathcal{T}_S\xleftarrow{\simeq}\tau_*\tau^!\delta_1^*\delta^{\Delta}\mathcal{T}_S\to\tau_*\tau^!\mathcal{K}_{X/Y/S}.$$

如果以下条件成立：

(4.3.6) $$H^0(Z,\mathcal{K}_{Z/Y})=0 \text{ 且 } H^1(Z,\mathcal{K}_{Z/Y})=0,$$

那么映射 $H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/S})\xrightarrow{(3.6.2)}H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})$ 是同构。此时，同调类 $\widetilde{C}^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})\in H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/Y/S})$ 定义了 $H^0_Z(X,\mathcal{K}_{X/S})$ 中的一个元素，我们将其记为 $C^Z_{X/Y/S}(\mathcal{F})$。

5 Motives 的分歧理论

5.1 二次型 Artin 导子 当本人在雷根斯堡大学做博士后研究时，Denis-Charles Cisinski 教授提出了一个关于构建 motive 的示性链的项目。为此，我们必须考虑以下要素：

1. 设 X 是完满域 k 上的光滑代数簇。我们需要为可构造 motivic 谱 $\mathcal{F}\in\mathbf{SH}_c(X)$ 定义奇异支撑；
2. 当 X 是一条光滑曲线时，我们必须构造 Artin 导子的二次型版本。更确切地说，我们必须在每个闭点 $x\in|X|$ 处构造一个二次型 $a_x^Q(\mathcal{F})\in\mathrm{GW}(k(x))$，其中 $\mathrm{GW}(k(x))$ 是在 $k(x)$ 上的（虚）非退化对称双线性型构成的 Grothendieck-Witt 环；
3. 构造二次型版本的 Milnor 公式 (1.5.2) 与导子公式 (1.5.3)；
4. 为某些具有好性质的 **SH** motive，构造示性链的二次型版本。

通过使用 $\mathcal{F}$-横截性条件代替 ULA 条件（参见引理 4.2），我们可以使用 Beilinson 的方法来定义 motive 的奇异支撑。然而在当时，很难为 motive 定义 Artin 导子。后来我们在论文 [YZ22] 中观察到一个平展可构造层的 Artin 导子可以用 NA 类来表达（参见 (3.9.1)）。基于此，我们在 [JY22] 中成功定义了一个可构造 motive 的 Artin 导子，并证明了 Grothendick-Ogg-Shafarevich 公式 (1.4.1) 的二次型版本。

定理 5.2 ([JY22, Theorem 1.3]) 设 $p:X\to\mathrm{Spec}(k)$ 是一个光滑且紧合的态射，其中 X 是连通的。设 Z 是 X 的一个无处稠密的闭子概形，其补集为 U。设 $\mathcal{F}\in\mathbf{SH}_c(X)$ 是一个可构造 *motivic* 谱，使得 $\mathcal{F}|_U$ 是可对偶的。那么我们有以下的等式：

(5.2.1) $$\chi(p_*\mathcal{F})=p_*(\mathrm{rk}\mathcal{F}\cdot e(T_{X/k}))-a_Z^Q(\mathcal{F})\quad\text{in}\quad\mathrm{GW}(k)[1/2].$$

如果 k 的特征不等于 2 且 X 是奇维的（例如 X 是光滑曲线），则有：

(5.2.2) $$\chi(p_*\mathcal{F})=\mathrm{rk}\mathcal{F}_{\mathrm{et}}\cdot\chi(X/k)-a_Z^Q(\mathcal{F})\quad\text{in}\quad\mathrm{GW}(k).$$

5.3 二次型 Milnor 公式与导子公式 对于球面谱 $\mathbb{I}_k$, Levine、Lehalleur 以及 Srinivas [LPS24] 研究了二次型版本的 Bloch 导子公式（以及 Deligne 的 Milnor 公式）。他们提出了一个关于（孤立的）齐次和拟齐次奇点的二次型导子公式的猜想。为了处理正特征的非孤立情况，必须考虑 Artin 导子与 Swan 导子的二次精细化。

基于 [JY22] 中的方法, 我们可以同时回答 5.1 中的第 (3) 项与第 (4) 项。实际上，在 [YZ22] 中，我们发现导子公式是 NA 类的函子性质的结果。我们可以使用相同的策略来证明二次型版本的导子公式。对于第 (4) 项，如果 $\mathcal{F}$ 的奇异支撑的维数等于 $\dim X$，那么我们可以使用 3.8 中描述的方法来定义 $\mathcal{F}$ 的示性链的二次精细化。

参考文献

[Abb00] A. Abbes, *The Grothendieck-Ogg-Shafarevich formula for arithmetic surfaces*, Journal of Algebraic Geometry, 9 (2000): 529-576. 3, 5

[AS07] A. Abbes and T. Saito, *The characteristic class and ramification of an ℓ-adic étale sheaf*, Inventiones Math. 168 (2007): 567-612. 3, 7, 9

[AS09] A. Abbes and T. Saito, *Analyse micro-locale ℓ-adique en caractéristique $p>0$: Le cas d'un trait*, Publication of the Research Institute for Mathematical Sciences, 45-1 (2009): 25-74. 8

[AP18] T. Abe and D. Patel, *On a localization formula of epsilon factors via microlocal geometry*, Ann. K-Theory 3(3) 2018: 461-490. 7

[Abe21] T. Abe, *Ramification theory from homotopical point of view, I*, 2021, arXiv:2206.02401. 3, 8

[Abe22] T. Abe, *On the Serre conjecture for Artin characters in the geometric case*, 2022, preprint. 9

[Bei07] A. Beilinson, *Topological $\mathcal{E}$-factors*, Pure Appl. Math. Q., 3(1, part 3) (2007):357-39. 4, 7

[Bei16] A. Beilinson, *Constructible sheaves are holonomic*, Sel. Math. New Ser. 22, (2016): 1797–1819. 4

[Blo87] S. Bloch, *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987): 421–450. 3, 4

[Del73] P. Deligne, *La formule de dualité globale*, Exposé XVIII, pp.481-587 in SGA4 Tome 3: *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, edited by M.Artin et al., Lecture Notes in Math.305, Springer, 1973. 4

[Del72] P. Deligne, *La formule de Milnor*, Exposé XVI, pp.197-211 in SGA7 II: *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math. 340, Springer, 1973. 3

[Del72e] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L* in Modular Functions of One Variable, II, Lecture Notes in Mathematics 349 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972. 6, 7

[Del11] P. Deligne, *Notes sur Euler-Poincaré: brouillon project*, 8/2/2011. 3, 4

[Gui22] Q. Guignard, *Geometric local ε-factors in higher dimensions*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 21(6), (2022): 1887-1913. 7

[Hu15] H. Hu, *Refined characteristic class and conductor formula*, Math. Z., no.1-2, 281(2015): 571–609. 3

[JSY22] F. Jin, P. Sun and E. Yang, *The pro-Chern-Schwarz-MacPherson class in Borel-Moore motivic homology*, arXiv:2208.11989, 2022. 2

[JY21] F. Jin and E. Yang, *Künneth formulas for motives and additivity of traces*, Adv. Math. 376 (2021) 107446, 83 pages. 2

[JY22] F. Jin and E. Yang, *The quadratic Artin conductor of a motivic spectrum*, arXiv:2211.10985, 2022. 2, 3, 10, 12

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, Grundlehren der Math. Wissenschaften, vol.292, Springer, Berlin (1990). 4, 8

[KS83] K. Kato and S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. 118 (1983):241-275. 6

[KS04] K. Kato and T. Saito, *On the conductor formula of Bloch*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, (2004)100: 5-151. 3, 5

[KS08] K. Kato and T. Saito, *Ramification theory for varieties over a perfect field*, Ann. of Math. (2) 168 (2008), no. 1, 33–96. 2, 3, 4, 6

[KS12] K. Kato, and T. Saito, *Ramification theory for varieties over a local field*, Publications Mathematiques de IHES, (2013) 117: 1-178. 3, 4

[Lau83] G. Laumon, *Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface*, Astérisque, 101-102 (1983): 193-207. 3, 5

[Lau87] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 65 (1987): 131-210. 6, 7

[LZ22] Q. Lu and W. Zheng, *Categorical traces and a relative Lefschetz-Verdier formula*, Forum of Mathematics, Sigma, Vol.10 (2022): 1-24. 2, 8

[LPS24] M. Levine, S. P. Lehalleur and V. Srinivas, *Euler characteristics of homogeneous and weighted-homogeneous hypersurfaces*, Adv. Math. 441 (2024) 109556, 86 pages. 12

[Ooe24] R. Ooe, *F-characteristic cycle of a rank one sheaf on an arithmetic surface*, arXiv:2402.06163. 5

[Org03] F. Orgogozo, *Conjecture de Bloch et nombres de Milnor*, Ann. Inst. Fourier 53 (2003), no. 6, 1739–1754. 5

[Pat12] D. Patel, *De Rham ε-factors*,Inventiones Mathematicae, Volume 190, Number 2, (2012): 299-355. 7

[Sai84] S. Saito, *Functional equations of L-functions of varieties over finite fields*, Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. IA, Mathematics, Vol.31, No.2 (1984): 287-296. 6

[Sai93] T. Saito, *ε-factor of a tamely ramified sheaf on a variety*, Inventiones Math. 113 (1993): 389-417. 6

[Sai94] T. Saito, *Jacobi sum Hecke characters, de Rham discriminant, and the determinant of ℓ-adic cohomologies*, Journal of Algebraic Geometry, 3 (1994): 411–434. 6

[Sai17] T. Saito, *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, Inventiones Math. 207 (2017): 597-695. 3, 4, 5, 6, 7, 10

[Sai18] T. Saito, *On the proper push-forward of the characteristic cycle of a constructible sheaf*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume 97, (2018): 485-494. 3, 6

[Sai21] T. Saito, *Characteristic cycles and the conductor of direct image*, J. Amer. Math. Soc. 34 (2021): 369-410. 3, 6, 7

[Sai22] T. Saito, *Cotangent bundles and micro-supports in mixed characteristic case*, Algebra & Number Theory, vol.16, no.2, (2022): 335-368. 5

[Tak19] D. Takeuchi, *Characteristic epsilon cycles of ℓ-adic sheaves on varieties*, arXiv:1911.02269, 2019. 5, 7

[Tak20] D. Takeuchi, *Symmetric bilinear forms and local epsilon factors of isolated singularities in positive characteristic*, arXiv:2010.11022, 2020. 5

[Tsu11] T. Tsushima, *On localizations of the characteristic classes of ℓ-adic sheaves and conductor formula in characteristic $p > 0$*, Math. Z. 269 (2011): 411-447. 3

[UYZ20] N. Umezaki, E. Yang and Y. Zhao, *Characteristic class and the ε-factor of an étale sheaf*, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020): 6887-6927. 2, 5, 6, 7, 8

[Vid09a] I. Vidal, *Formule du conducteur pour un caractère l-adique*, Compositio Math. 145 (2009): 687-717. 6

[Vid09b] I. Vidal, *Formule de torsion pour le facteur epsilon d'un caractère sur une surface*, Manuscripta math. 130 (2009): 21-44. 6

[XY23] J. Xiong and E. Yang, *Characteristic cycles and non-acyclicity classes for constructible etale sheaves*, https://www.math.pku.edu.cn/teachers/yangenlin/MF, 2023. 2, 10, 11

[Y14] E. Yang, *Logarithmic version of the Milnor formula*, Asian J. Math. 21, No. 3 (2017). 4

[YZ21] E. Yang and Y. Zhao, *On the relative twist formula of ℓ-adic sheaves*, Acta. Math. Sin.-English Ser. 37 (2021): 73–94. 2, 6, 7, 8

[YZ22] E. Yang and Y. Zhao, *Cohomological Milnor formula and Saito's conjecture on characteristic classes*, arXiv:2209.11086, 2022. 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12